

Un algoritmo basado en gráficas para resolver problemas de división justa

William Olvera López Francisco Sánchez Sánchez

Homenaje a Sergio Hernández y Paloma Zapata

Facultad de Ciencias, UNAM.

Abril 2013

Introducción

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto de bienes continuamente divisibles entre un conjunto de agentes. Se busca que todos los agentes reciban el mismo porcentaje de acuerdo a sus propias valoraciones y éste sea tan grande como sea posible.

Introducción

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto de bienes continuamente divisibles entre un conjunto de agentes. Se busca que todos los agentes reciban el mismo porcentaje de acuerdo a sus propias valoraciones y éste sea tan grande como sea posible.
- ▶ **Ejemplo:** pizza con varios ingredientes.

Introducción

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto de bienes continuamente divisibles entre un conjunto de agentes. Se busca que todos los agentes reciban el mismo porcentaje de acuerdo a sus propias valoraciones y éste sea tan grande como sea posible.
- ▶ **Ejemplo:** pizza con varios ingredientes.
- ▶ **Resultado Principal:** Un algoritmo que distribuye el conjunto de bienes de tal manera que todos los agentes obtienen el mismo porcentaje de acuerdo a sus propias valoraciones y además, este porcentaje es máximo.

Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

Cada persona asigna 100 puntos.

Bien	P1	P2
1	10	14
2	20	23
3	30	24
4	15	10
5	13	12
6	12	17
	100	100

Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

Cada bien se asigna al mejor postor.

Bien	P1	P2
1	10	14
2	20	23
3	30	24
4	15	10
5	13	12
6	12	17
	58	54

Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ Ajuste al ganador.

Bien	P1	P2	
1	10	14	
2	20	23	
3	30	24	$\frac{30}{24} = 1.25$
4	15	10	$\frac{15}{10} = 1.50$
5	13	12	$\frac{13}{12} = 1.08$
6	12	17	
	58	54	

Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ Ajuste al ganador.

Bien	P1	P2	
1	10	14	
2	20	23	
3	30	24	$\frac{30}{24} = 1.25$
4	15	10	$\frac{15}{10} = 1.50$
5	13	12	$\frac{13}{12} = 1.08$
6	12	17	
	58	54	

- ▶ Se calcula la fracción que se necesita pasar de P1 a P2.

$$58 - x \cdot (13) = 54 + x \cdot (12) \implies x = 0.16$$

Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

Ajuste al ganador.

Bien	P1	P2	
1	10	14	
2	20	23	
3	30	24	$\frac{30}{24} = 1.25$
4	15	10	$\frac{15}{10} = 1.50$
5	13(.84)	12(.16)	$\frac{13}{12} = 1.08$
6	12	17	
	55.92	55.92	

Propiedades del Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ **Equitativo:** Cada jugador recibe el mismo monto

Propiedades del Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ **Equitativo:** Cada jugador recibe el mismo monto
- ▶ **Libre de envidias:** Ninguno de los jugadores prefiere lo que le tocó a otro.

Propiedades del Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ **Equitativo:** Cada jugador recibe el mismo monto
- ▶ **Libre de envidias:** Ninguno de los jugadores prefiere lo que le tocó a otro.
- ▶ **Optima de Pareto:** No hay otra asignación de tal forma que se pueda mejorar a alguno sin empeorar a otro.

Definiciones y notación

Sean

- ▶ $M = \{1, \dots, m\}$ el conjunto de bienes.

Definiciones y notación

Sean

- ▶ $M = \{1, \dots, m\}$ el conjunto de bienes.
- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de agentes.

Definiciones y notación

Sean

- ▶ $M = \{1, \dots, m\}$ el conjunto de bienes.
- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de agentes.
- ▶ $A = (a_{ij})_{i \in M, j \in N}$ donde a_{ij} es la valuación que el agente j da al bien i . Suponemos que,

$$\sum_{i \in M} a_{ij} = c$$

para todo $j \in N$ y algún $c \in \mathbb{R}$.

Definiciones y notación

Sean

- ▶ $M = \{1, \dots, m\}$ el conjunto de bienes.
- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de agentes.
- ▶ $A = (a_{ij})_{i \in M, j \in N}$ donde a_{ij} es la valuación que el agente j da al bien i . Suponemos que,

$$\sum_{i \in M} a_{ij} = c$$

para todo $j \in N$ y algún $c \in \mathbb{R}$.

- ▶ $X = (x_{ij})_{i \in M, j \in N}$ donde x_{ij} es el porcentaje del bien i asignado al agente j .

Definiciones y notación

Diremos que la solución X está nivelada si el valor total que obtiene cada agente con X , de acuerdo a sus propias valoraciones, es el mismo.

- ▶ **Definición.** Diremos que la solución X para el problema A está nivelada si

$$\sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} = c$$

para todo $j \in N$ y alguna constante c .

Definiciones y notación

Diremos que la solución X esta nivelada si el valor total que obtiene cada agente con X , de acuerdo a sus propias valoraciones, es el mismo.

- ▶ **Definición.** Diremos que la solución X para el problema A está nivelada si

$$\sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} = c$$

para todo $j \in N$ y alguna constante c .

- ▶ El problema de PL para encontrar la mejor solución nivelada,

max z

s.a.

$$\sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} \geq z \quad j \in N$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad i \in M$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Definiciones y notación

► Problema dual

$$\min \sum_{i \in M} v_i$$

$$a_{ij} u_j \leq v_i \quad i \in M, j \in N$$

$$\sum_{j \in N} u_j = 1$$

$$u_j \geq 0$$

Las variables duales u_j nos dicen cuánto incrementa z si al jugador j se le da una unidad adicional de utilidad. Las variables duales v_i nos dicen en cuánto se incrementa z si agregamos una unidad del bien i .

Definiciones y notación

- ▶ **Observación 1:** Hay $m + n - 1$ variables básicas.

Definiciones y notación

- ▶ **Observación 1:** Hay $m + n - 1$ variables básicas.
- ▶ **Observación 2:** Condiciones Kuhn-Tucker

$$(a_{ij}u_j - v_i) x_{ij} = 0$$

Definiciones y notación

- ▶ **Observación 1:** Hay $m + n - 1$ variables básicas.
- ▶ **Observación 2:** Condiciones Kuhn-Tucker

$$(a_{ij}u_j - v_i) x_{ij} = 0$$

- ▶ **Observación 3:** A cada solución básica le asociamos una gráfica (la cual no tiene ciclos).

$$g = \{(i, j) | x_{ij} > 0\}$$

Solución del problema dual asociada a la gráfica

- ▶ Si conocemos la gráfica óptima, entonces la solución al problema dual es directa. Necesitamos resolver el sistema

$$a_{ij}u_j = v_i \quad \text{para } (i, j) \in g.$$

$$\sum_{j \in N} u_j = 1$$

Solución del problema dual asociada a la gráfica

- ▶ Si conocemos la gráfica óptima, entonces la solución al problema dual es directa. Necesitamos resolver el sistema

$$a_{ij}u_j = v_i \quad \text{para } (i, j) \in g.$$

$$\sum_{j \in N} u_j = 1$$

- ▶ Nótese que,

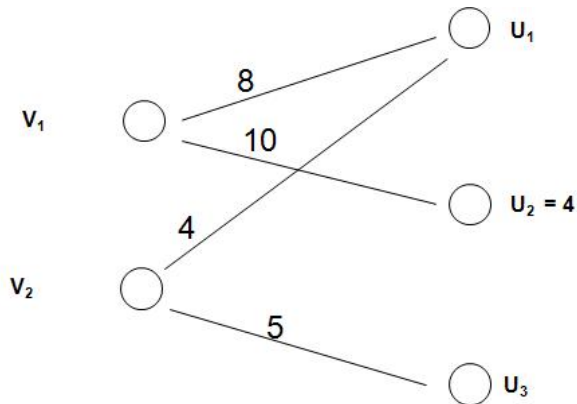
$$z = \sum_{i \in M} v_i$$

Ejemplo



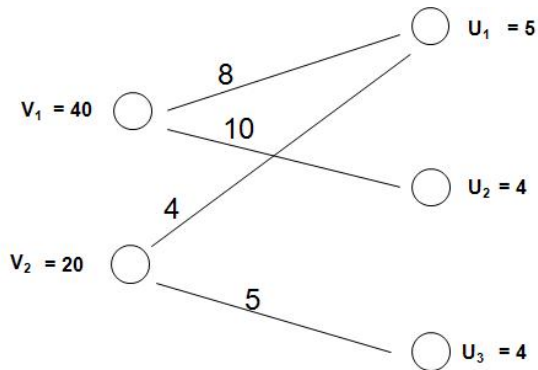
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo



necesitamos que $a_{ij}u_j = v_i$ para toda $(i, j) \in g$.

Ejemplo



Solución del problema primal asociada a la gráfica

- ▶ Con el fin de resolver el problema primal, necesitamos resolver el sistema,

$$\begin{aligned}\sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} &= z \\ \sum_{j \in N} x_{ij} &= 1\end{aligned}$$

Solución del problema primal asociada a la gráfica

- ▶ Con el fin de resolver el problema primal, necesitamos resolver el sistema,

$$\begin{aligned}\sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} &= z \\ \sum_{j \in N} x_{ij} &= 1\end{aligned}$$

- ▶ Si hay una sola arista que conecta a $j \in N$ entonces $x_{ij} = \frac{z}{a_{ij}}$.

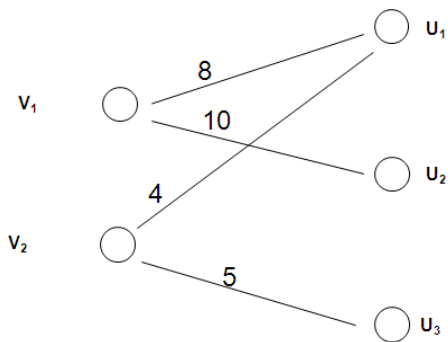
Solución del problema primal asociada a la gráfica

- ▶ Con el fin de resolver el problema primal, necesitamos resolver el sistema,

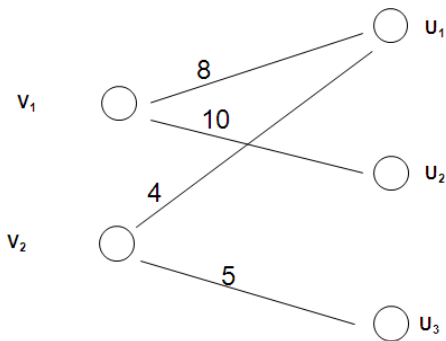
$$\begin{aligned}\sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} &= z \\ \sum_{j \in N} x_{ij} &= 1\end{aligned}$$

- ▶ Si hay una sola arista que conecta a $j \in N$ entonces $x_{ij} = \frac{z}{a_{ij}}$.
- ▶ Si hay una sola arista que conecta a $i \in M$ entonces $x_{ij} = 1$.

Ejemplo



Ejemplo



- ▶ Como $z = \sum_{i \in M} v_i = \frac{60}{13}$ y $\sum_{i \in M} a_{ij} x_{ij} = z$

$$x_{23} = \frac{1}{5} \frac{60}{13} = \frac{12}{13} \quad x_{21} = 1 - x_{23} = \frac{1}{13} \quad x_{12} = \frac{6}{13} \quad x_{11} = \frac{7}{13}$$

Algoritmo

1. Encontrar una gráfica para A que sea factible en el dual.
2. Suponer $z = w = \sum_{i \in M} v_i$
3. Encontrar la solución primal correspondiente. Si la solución es factible, terminamos.
4. De otra manera, encontrar otra gráfica dual factible y regresar a 2.

Encontrar una gráfica que sea factible en el dual

1. Incluir la entrada más grande de cada renglón.
2. Incluir otras $n - 1$ manteniendo factibilidad dual:

$$(h, k) := \arg \min \left\{ \frac{v_i}{a_{ij}u_j} : (i, j) \notin E, i \notin N(C_j) \right\}.$$

3. Actualizar v y u .

Cómo encontrar otra gráfica dual factible

1. Supongamos $x_{hk} < 0$. Sea $E' := E \setminus (h, k)$.
2. Calcular

$$(i, j) := \arg \min \left\{ \frac{v_i}{a_{ij} u_j} : (i, j) \notin E', i \in N(C_k), j \in N(C_h) \right\}.$$

3. Actualizar v y u .

Ejemplo 2

Ejemplo 2.

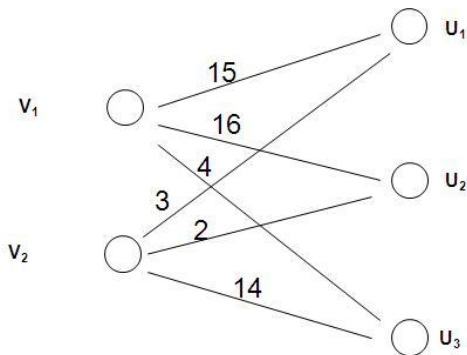


$$A = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 4 \\ 3 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

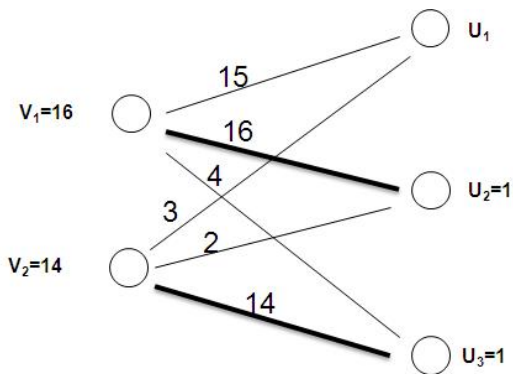
Ejemplo 2.



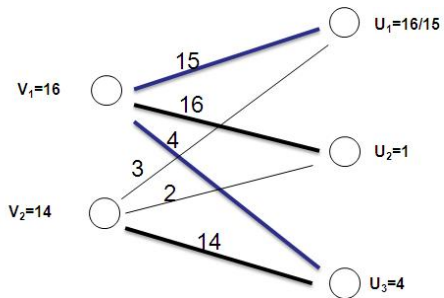
$$A = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 4 \\ 3 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$



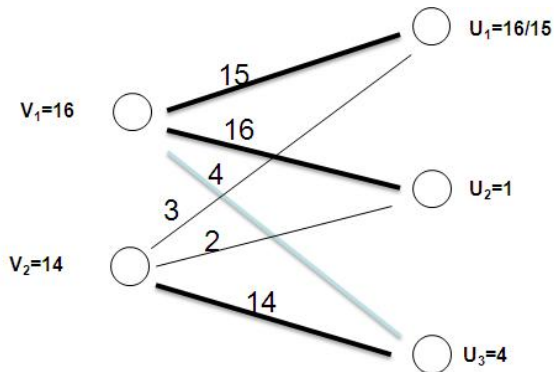
Ejemplo 2.



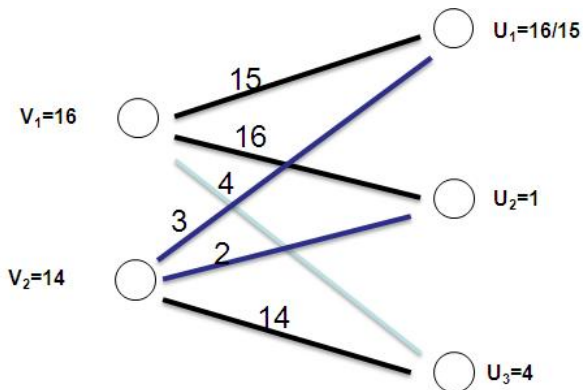
Ejemplo 2.



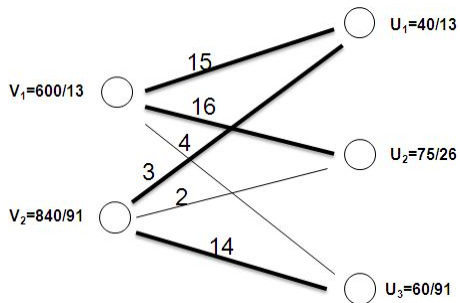
Ejemplo 2.



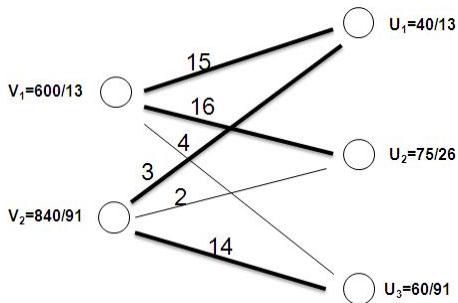
Example 2.



Ejemplo 2.



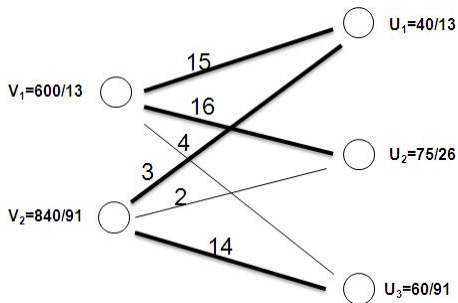
Ejemplo 2.



- ▶ Como $\sum u_j = \frac{1205}{182}$ entonces

$$v^T = \left(\frac{1680}{241}, \frac{336}{241} \right) \quad u^T = \left(\frac{112}{241}, \frac{105}{241}, \frac{24}{241} \right)$$

Ejemplo 2.









- ▶ Como $\sum u_j = \frac{1205}{182}$ entonces

$$v^T = \left(\frac{1680}{241}, \frac{336}{241} \right) \quad u^T = \left(\frac{112}{241}, \frac{105}{241}, \frac{24}{241} \right)$$

- ▶ y

$$x_{21} = \frac{97}{241} \quad x_{11} = \frac{115}{241} \quad x_{12} = \frac{126}{241} \quad x_{23} = \frac{144}{241}$$

Teorema *El algoritmo anterior encuentra la mejor solución nivelada.*

-  Austin, A.K. (1982) Sharing a cake. Math Gaz 6 437:212-215.
-  Dubins, L.E., Spanier E.H. (1961) How to cut a cake fairly Am Math Mon 68:1-17.
-  Lemke C.E. (1954) The dual method of solving the linear programming problem. Nav Res Logist Q 1:36-47.
-  Neyman J. (1946) Un theoreme d'existence. C.R. Acad Sci Paris 222:843-845.
-  Steinhaus H. (1948) The problem of fair division. Econom 16:101-104.
-  Stromquist W. (1980) How to cute a cake fairly. Am Math Mon 87:640 - 644.